CAPITOLO 2.5

SISTEMA BINARIO - ALGEBRA BOOLEANA - COMPONENTI LOGICI

2.5.1 - Sistemi di numerazione. — Un generico numero intero decimale viene rappresentato dall'insieme di alcune cifre, in cui la prima da destra rappresenta le unità, la seconda le decine, la terza le centinaia, ecc. Ad esempio, il simbolo 237 indica la somma di 7 unità, 3 decine e 2 centinaia.

In concreto un numero è rappresentato da un *simbolo* (parola) costituito da una *stringa di cifre*, in cui ciascuna cifra è dotata di *peso* diverso a seconda della *posizione* in cui si trova nella stringa stessa.

a) SISTEMA DECIMALE. — Usualmente siamo abituati a contare con il sistema decimale, in cui si hanno le dieci cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Quando, ad esempio, si dà la *stringa di cifre* 4735.26 si intende:

$$4735.26 = 4 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2}$$

La stringa in modo sintetico rappresenta quel polinomio, ed ogni cifra è il coefficiente della potenza del 10 che gli compete per posizione e che costituisce il suo peso. Tale numerazione si dice di *base 10*. Ovviamente lo spostamento del punto o della virgola di un posto verso destra corrisponde a moltiplicare per 10 il numero, lo spostamento verso sinistra invece a dividere per 10.

b) SISTEMA BINARIO. — Nei circuiti elettronici viene generalmente usato il sistema di numerazione binaria, di *base 2*, e che usa le due sole cifre 0 e 1 (dette *bit* = *binary digit*).

In modo simile al sistema decimale, ad esempio, la stringa 1011.101 rappresenta il seguente polinomio

$$\begin{aligned} 1011.101 &= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = \\ &= 2^3 + 2^1 + 2^0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} \end{aligned}$$

Il numero binario corrisponde al decimale $8 + 2 + 1 + 0.5 + 0.125 = 11.625$, cioè si può scrivere: $(1011.101)_2 = (11.625)_{10}$.

Ogni cifra della stringa binaria è pesata con la potenza di 2 che le compete in funzione della sua posizione (*numerazione posizionale di base 2*). Si nota come in questo caso lo spostamento del punto o della virgola di un posto verso destra corrisponde a moltiplicare per 2 il numero, lo spostamento verso sinistra invece a dividere per 2.

c) Sistema ottale. — È la numerazione base degli elaboratori elettronici. È posizionale di *base 8*, ed usa le cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. In modo simile ai precedenti, ad esempio, la stringa 537.42 rappresenta il polinomio

$$537.42 = 5 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 7 \times 8^0 + 4 \times 8^{-1} + 2 \times 8^{-2}$$

che corrisponde al numero decimale

$$5 \times 64 + 3 \times 8 + 7 \times 1 + 4 \times 0.125 + 2 \times 0.015625 = 351.53125$$

cioè si può scrivere $(537.42)_8 = (351.53125)_{10}$.

Questo è un sistema molto usato per la facilità con cui si può passare dal sistema ottale al binario e viceversa, poiché $8 = 2^3$: basta allora sostituire ad ogni cifra ottale la sua corrispondente binaria e viceversa.

Così l'esempio diviene: $(537.42)_8 = (101\,011\,111.100\,010)_2$.

d) Sistema esadecimale. — È un altro sistema usato negli elaboratori elettronici. È posizionale come i precedenti, di *base 16*, ed usa le cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Ad esempio, la stringa A27.3F rappresenta il polinomio

$$A27.3F = A \times 16^2 + 2 \times 16^1 + 7 \times 16^0 + 3 \times 16^{-1} + F \times 16^{-2}$$

che corrisponde al numero decimale

$$10 \times 16^2 + 2 \times 16^1 + 7 \times 16^0 + 3 \times 16^{-1} + 15 \times 16^{-2} = 10 \times 256 + 2 \times 16 + 7 \times 1 + 3 \times \\ \times 0.0625 + 15 \times 0.015625 = 2599.421875$$

cioè si può scrivere $(A27.3F)_{16} = (2599.421875)_{10}$.

Poiché $16 = 2^4$, è anche facile passare dal sistema esadecimale al binario (e viceversa), basta esprimere ogni cifra esadecimale con le corrispondenti quattro cifre binarie (e viceversa). Così l'esempio diviene: $(A27.3F)_{16} = (1010\,0010\,0111.0011\,1111)_2$.

Altri esempi: $(5BE)_{16} = 5 \times 16^2 + 11 \times 16^1 + 14 \times 16^0 = (1470)_{10}$
$(5BE)_{16} = (0101\,1011\,1110)_2 = (010\,110\,111\,110)_2 = (2676)_8$.

e) Numeri binari con segno. — I numeri decimali positivi vengono distinti dai negativi utilizzando rispettivamente i segni «+» e «−». Lo stesso si fa per il numero binario. Nei numeri binari a sinistra della cifra più significativa si pone un'altra cifra (*bit di segno*) per indicare il segno: il simbolo «0» rappresenta il «+», il simbolo «1» rappresenta il «−».

Esempio: $(23)_{10} = (10111)_2$, $(+23)_{10} = (010111)_2$, $(-23)_{10} = (110111)_2$. Esiste uno zero positivo (0000...) e uno zero negativo (1000...).

Spesso il numero negativo viene rappresentato in complemento a 1 o in complemento a 2.

Il *complemento a 1* si ottiene scambiando ciascuna cifra 0 in 1, e 1 in 0; inoltre si antepone il bit di segno 1 per indicare che il numero è negativo.

Il *complemento a 2* si ottiene eseguendo il complemento a 1 e quindi si aggiunge 1 al bit meno significativo (ultimo a destra) e si propaga il riporto. Ancora si antepone il bit di segno 1 per indicare che il numero è negativo.

Esempio: Tenuto presente che $(23)_{10} = (10111)_2$, il numero $(-23)_{10}$ in complemento a 1 diviene 101000 e in complemento a 2: 101001 + 1 = 101010.

Ciò è utile perché se nella somma di numeri positivi e negativi si sommano anche le cifre che rappresentano il segno, si ottiene automaticamente il segno del risultato finale.

f) Codici. — Il codice binario è quello che si usa in modo immediato nei circuiti elettronici; esso tuttavia ha lo svantaggio di essere di difficile lettura, specie per i valori elevati. Perciò spesso si rappresenta ciascuna cifra di un numero decimale con una notazione di tipo binario che necessita di almeno 4 bit per cifra decimale ($2^3 < 10 < 2^4$). Sono questi i *codici* BCD (*b*inary *c*ode *d*ecimal), alcuni dei quali sono riportati nella tab. **2.5.1.1**.

Si ha il *codice* BCD *naturale* se ad ogni cifra decimale da 0 a 9 si fanno corrispondere le prime 10 combinazioni di 4 bit. Questo è un *codice pesato* cioè in cui ogni bit ha un valore a seconda della posizione che occupa nella parola. In esso ad ogni cifra binaria corrispondono rispettivamente i pesi 8-4-2-1 (da cui anche il nome di BCD 8421).

Altri codici BCD sono, ad esempio, il *codice Eccesso a 3* (autocomplementare, nel senso che scambiando gli 0 con gli 1 e viceversa, dà il complemento a 9 della cifra rappresentata), il *codice Aiken* 2421 (autocomplementare e pesato di pesi 2421), il *codice Gray* (monoprogressivo, nel senso che da una combinazione alla successiva si ha la variazione di un solo bit). Si hanno anche altri codici (*ridondanti*) che usano più dei 4 bit necessari per ogni cifra decimale, ad esempio il *codice 2 su 5*, il *codice biquinario* (vedasi tab. **2.5.1.1**), ecc. Per rappresentare oltre ai numeri anche lettere, si devono impiegare *codici alfanumerici* con più di 4 bit (ASCII a 7 bit che può rappresentare $2^7 = 128$ simboli, EBCDIC a 8 bit che può rappresentare $2^8 = 256$ simboli, ...).

Esempio: $(27)_{10} = (0010\,0111)_{\underset{8421}{\mathrm{BCD}}} = (0101\,1010)_{\mathrm{Eccesso}\,3} = (0010\,1101)_{\underset{2421}{\mathrm{AIKEN}}} = (0011\,0100)_{\mathrm{GRAY}}$.

Tab. **2.5.1.1** - Alcuni codici.

Decimale	Binario	BCD 8421	Eccesso a 3	Aiken 2421	Gray	2 su 5	Biquinario
0	0000	0000	0011	0000	0000	01100	1010000
1	0001	0001	0100	0001	0001	11000	1001000
2	0010	0010	0101	0010	0011	10100	1000100
3	0011	0011	0110	0011	0010	10010	1000010
4	0100	0100	0111	0100	0110	01010	1000001
5	0101	0101	1000	1011	0111	00110	0110000
6	0110	0110	1001	1100	0101	10001	0101000
7	0111	0111	1010	1101	0100	01001	0100100
8	1000	1000	1011	1110	1100	00101	0100010
9	1101	1101	1100	1111	1101	00011	0100001

g) Controllo di parità. — Per dare la possibilità di riconoscere errori semplici nei codici si usa il metodo *parity-check* che consiste nell'aggiungere un bit di controllo in modo che il numero totale di bit con valore «1» sia *dispari*. Naturalmente si può scegliere di rendere *pari* il numero totale di bit con valore «1» (parità pari). Tuttavia il primo metodo (parità dispari) permette di marcare con un «1» anche lo zero.